



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

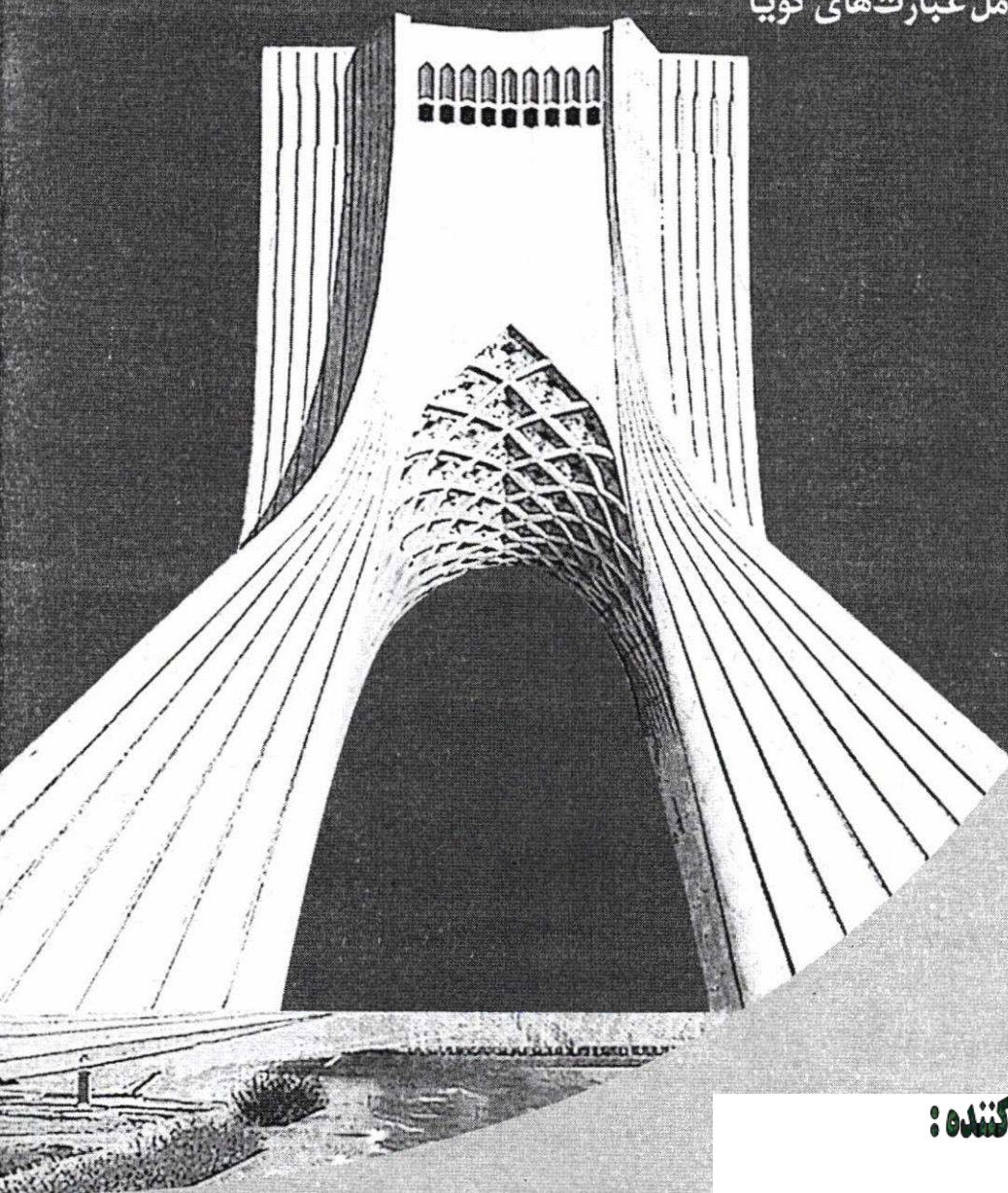
فصل دوم

معادله درجه دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۳ معادلات شامل عبارت‌های گویا



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس ۱

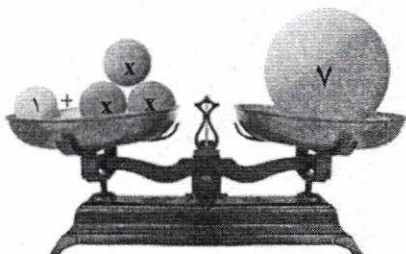
معادله و مسائل توصیفی

معادله $4x + 2 = 10$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای $x = 2$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود.
 $x = 2$ را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



$$1 + 3x = 7$$

$$3x = 7 - 1 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

فعالیت



$x = ?$ عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار، معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید. (چرا؟) چون:

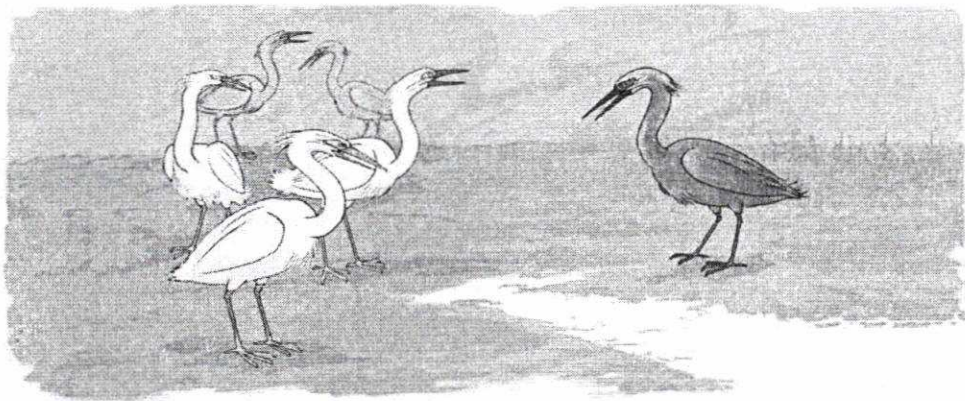
$$ax+b=0 \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

طرف تقسیم بر $(a \neq 0)$

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد: «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم». لطفاً به پرندۀ کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

نصفه ای از نصف ما:

$$\frac{\frac{1}{2}x}{2} = \frac{1}{4}x$$

$$100 = 1 + \text{نصف نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} \Rightarrow 100 = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + x \Rightarrow 100 = 1 + \frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{3}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{99 \times 4}{3} = 132$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟ چون بزرگترین توان (درجه) متغیر x برابر ۱ است.

ضرایب a و b کدام اند؟ $\frac{3}{4}x - 99 = 0$

$$\boxed{a = \frac{3}{4}} \quad \boxed{b = -99}$$

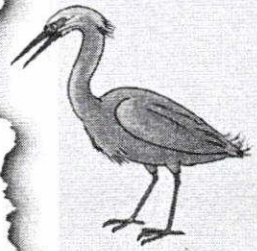
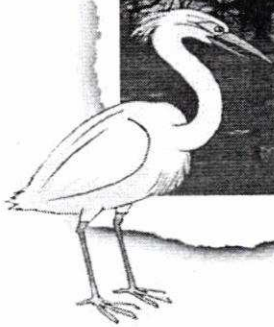
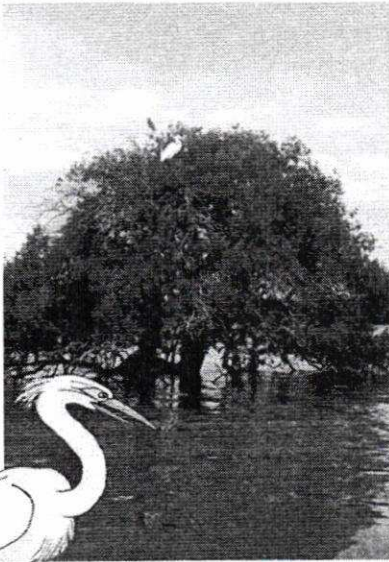
* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

✱ جنگل حرا، جزیره قشم

حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه‌سبز دریایی حرا از این درختان زیبا تشکیل شده است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در پهنه نیلگون خلیج فارس چشم‌ها را می‌نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خویش فرا می‌خواند. این جنگل‌های سبز مامن بیش از ۲۲۰ پرنده بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکستری دو گونه زیبا از این پرندگان‌اند.

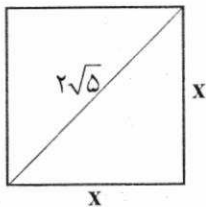


یادی از گذشته



فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۳

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.



به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

$$\dots x^2 + \dots x^2 = (2\sqrt{5})^2$$

بنابراین:

$$2x^2 = \frac{20}{2} \dots \Rightarrow x^2 = 10 \dots \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$$

پس اندازه هر ضلع مربع با در نظر گرفتن این که اندازه ضلع مثبت است، برابر $x = \sqrt{10}$ است و محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = 4\sqrt{10}$$

معادله $2x^2 = 20$ را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر x فرض شود، مربع همان عدد برابر x^2 و سه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$x^2 = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟ بله
از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟ چون معادله $x^2 = 3x$ را به یک تساوی درست عددی تبدیل می‌کنند.

$$x=0, x=1, x=-3, x=4, x=3$$



توجه: به جز روش حدس، برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0, x(x-3) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=3$$

$$x=0 \text{ یا } x-3=0$$



یادآوری:

اگر $a \times b = 0$ باشد

نتیجه می‌گیریم:

$$b=0 \text{ یا } a=0$$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0$$

است که در آن $a \neq 0$ ضرب x^2 .

b ضرب x و c عدد ثابت است.

(مثال)

$$3x^2 - \sqrt{7}x + \frac{1}{5} = 0$$

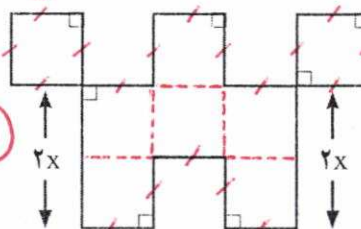
$$a=3, b=-\sqrt{7}, c=\frac{1}{5}$$

۲. در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه

مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.

$$\text{مساحت یک مربع به ضلع } x = x^2 \Rightarrow \text{مساحت شکل} = 18x^2$$

$$\text{محیط یک مربع به ضلع } x = 4x \Rightarrow \text{محیط شکل} = 22x$$



$$\text{یک ضلع ضرب بر خودش = مساحت مربع} \\ \text{یا} \\ \text{یک ضلع به توان ۲ (یک ضلع)} \\ \text{محیط اضلاع = مجموع اضلاع شکل}$$

$$18x^2 = 22x \Rightarrow 18x^2 - 22x = 0$$

$$2x(9x - 11) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } 9x-11=0$$

$$9x-11=0 \Rightarrow 9x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{9}$$

$$x=\frac{11}{9}$$

$$x=0 \text{ یا } 9x-11=0 \Rightarrow 9x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{9}$$

عاشق
طول اضلاع می‌باشد
منز باشد

عدد بدون واحد (چون بر واحد هیچ وقت حساب نمی‌کنیم) و محیط برابر می‌شود چون هم واحد نیستند

یادآوری:

$$\text{یک ضلع ضرب بر خودش = مساحت مربع} \\ \text{یا} \\ \text{یک ضلع به توان ۲ (یک ضلع)} \\ \text{محیط اضلاع = مجموع اضلاع شکل}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



نیما از پسرعمویش کیان سه سال بزرگ تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی کوچک تر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر $x-3$ است. بنابراین:

$$\textcircled{1} \quad 1-3=5$$

$$x \times (x-3) = 40$$

$$\textcircled{2} \quad 5-3=2$$

آیا می توانید جواب های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟ از درجه ۲

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می کند؟ این جواب در این سؤال معنی دارد؟ خیر، $x=-5$ غیر قابل قبول است، چون سن نمی تواند عدد منفی باشد.

$$\text{سن} \quad x=8$$

$$\textcircled{3} \quad 8-3=5$$

تمرین



۱. هر کدام از عبارت های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

۲. در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$

مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس

و ۱۲ فن ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون

تومان حقوق پرداخت می کند. حقوق یک فن ورز در این کارخانه ماهیانه

چقدر است؟



۳. با توجه به پیش بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود

را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع

تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

ب) اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

$$\text{هزار تن} \quad 14x = 44$$

$$\Rightarrow x=4$$

$$x=4 \quad 31 \times 4 = 124$$

$$x=4 \quad 15 \times 4 = 60$$

جواب ۲
حقوق مهندس = ۲x
۲ برابر حقوق فن ورز = $\frac{2}{3} \times 2x = \frac{4}{3}x$

$$2x = \text{حقوق مهندس}$$

$$\frac{4x}{3} = \text{حقوق مدیر}$$

$$3x = \text{حقوق مدیر}$$

$$3x + 8x + 12x = 55.5$$

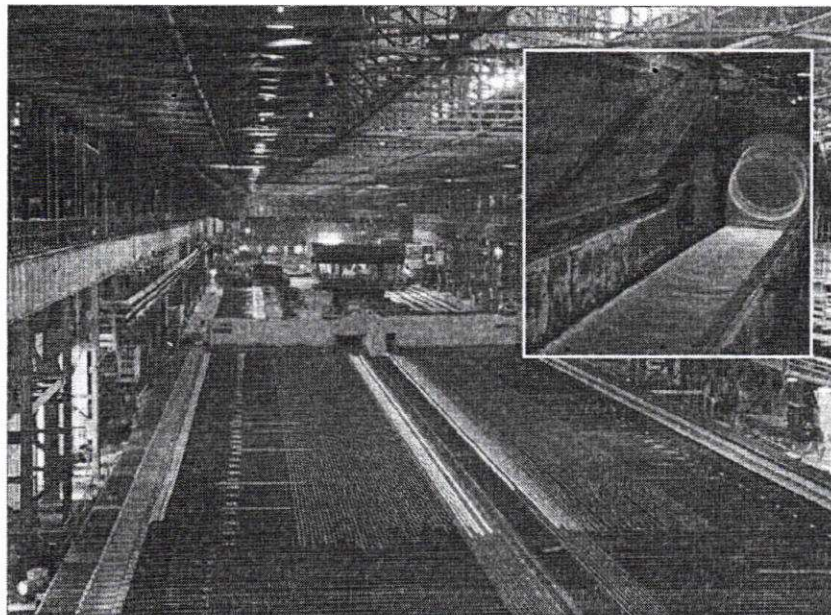
$$37x = 55.5 \Rightarrow x = \frac{55.5}{37} \Rightarrow x = 1.5$$

تهیه کننده:

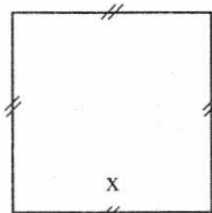
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کارخانه ذوب آهن اصفهان

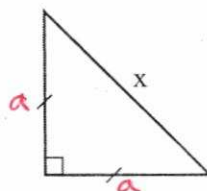
ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سال ۱۳۴۶ در دشت طبس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره‌برداری رسید. این کارخانه هم‌اکنون با تلاش شبانه‌روزی مسئولان و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان، ایران اسلامی دارد.



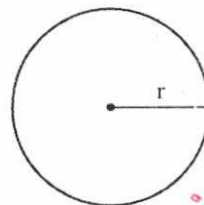
۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟ $x = ?$



شکل (۱) مساحت مربع $= x^2$



شکل (۲)



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \right)^2$$

$$= \pi \times \frac{1}{2\pi} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$a^2 + a^2 = x^2$$

$$\frac{2a^2}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$\text{مجموع مساحت‌ها} = 7 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{2x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7} \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

۱	الف
۲	ب
۳	پ
۴	ت
۵	ث
۶	ج
۷	چ
۸	ح
۹	خ
۱۰	د
۱۱	ذ
۱۲	ر
۱۳	ز
۱۴	س
۱۵	س
۱۶	ش
۱۷	ص
۱۸	ض
۱۹	ط
۲۰	ظ
۲۱	ع
۲۲	غ
۲۳	ف
۲۴	ق
۲۵	ک
۲۶	گ
۲۷	ل
۲۸	م
۲۹	ن
۳۰	و
۳۱	ه
۳۲	ی

بازی با حروف الفبا به کمک مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می شود. حروف نقطه دار به صورت ax^n مشخص شده اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a=4$) و دارای دو نقطه است ($n=2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می کنیم.
مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

$$\begin{array}{cccc} \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{چ} & + & \text{ه} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 31 & + & 7x^2 & + & 29x & + & 22x \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{معادل ریاضی غنچه}} 22x + 29x + 7x^2 + 31$$

حال با توجه به توضیح فوق:

۱- جدول زیر را کامل کنید:

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
$2x^1 + 1x^1$	الف + ب = آب
$3x^3 + 1$	آپ
$4x^2 + 12 + 11x$	ذرت

۲- الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.
 $4x^2 + 28 + 8 + 12 + 12 + 2x^1 + 28 + 1x^1 + 32 + 3x^3$

۳- آیا می توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

۴- با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

$$28 + 1x + 27 + 15$$

سلام

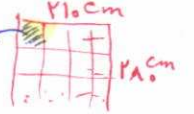
$$28 + 4x^2 + 15 + 31 + 30 + 4x^2 + 4x^2 + 15 + 30 + 10 + 29x^1 + 28$$

من دوست تو هستم

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

عینی در این قالی، ۱۲۰۰ مربع ۷×۷ وجود دارد. $\frac{210 \times 210}{7 \times 7} = 1200$ مساحت قالی = مساحت یک مربع ۷×۷



تعداد گره‌های موجود در یک مربع ۷×۷ = $\frac{5,880,000}{1200} = 4900$

برای سیدالین، تعداد گره‌های در یک ضلع این مربع کی $\sqrt{4900} = 70$

سیدالین قالی، ۷۰ رج دارد $\Rightarrow$ تعداد گره‌های موجود در یک ضلع ۷۰ سالی مربع ۷×۷ = رج $\Rightarrow$ طبعی بودن

۶. اگر در یک قالی با ابعاد $2/80m \times 2/10m$ (که عموماً ۲×۳ نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی

۵/۸۸۰/۰۰۰ عدد باشد: $210cm \downarrow$ $280cm \downarrow$ تبدیل به cm

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره ۱cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی

استفاده شده است؟ $5,880,000 \times 1cm = 5,880,000cm \div 100 = 58,800m$ تبدیل به متر

ج) یک قالی با فاف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی بیافد. اگر این قالی با فاف ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟ $x = 30000$

د) اگر این قالی با فاف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد

هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این

قالی با فاف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$\frac{5,880,000}{30000} = 196$ پس ۱۹۶ هفته طول می‌کشد

درآمد $35,000,000 - 5,400,000 = 29,600,000$ سود

$= 29,600,000$ میزان سود در ۱۹۶ هفته

میزان سود در یک هفته

$\frac{29,600,000}{196} = 150,000$ میزان سود در یک هفته



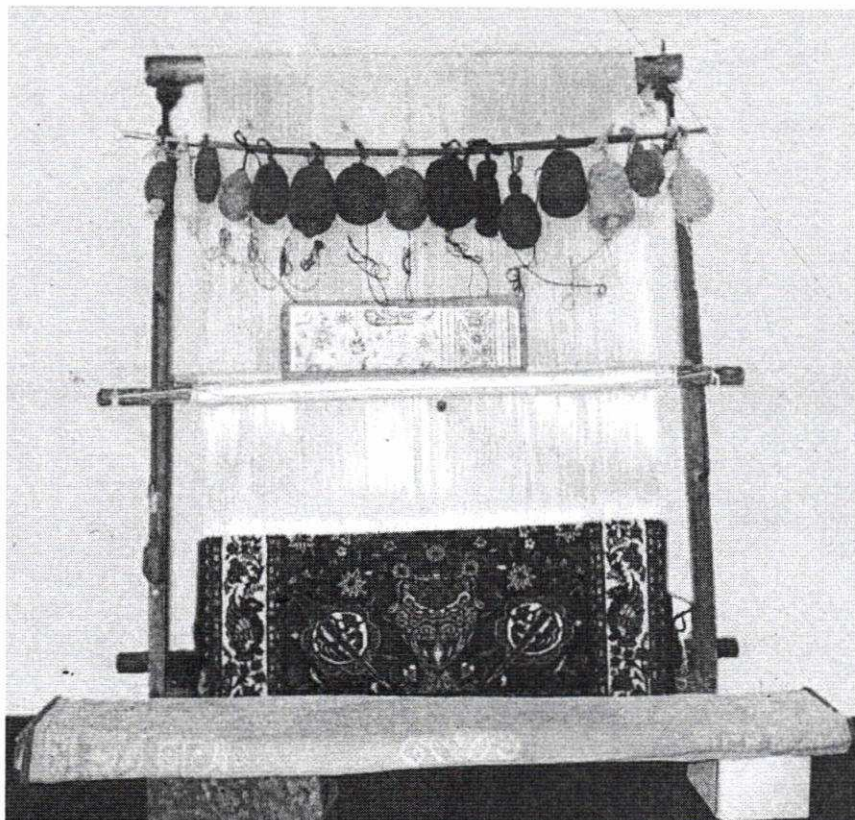
۱. «رج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در ۷cm طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی ۵ رج، وجود ۵ گره در یک ضلع مربع ۷×۷ است.

رج قالی = تعداد گره‌های قالی در ۷cm طول یا عرض قالی

صنعت قالی بافی



یکی از قدیمی‌ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی بافی است. در این حرفه به نخ‌های که قالی با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخ‌ها بر روی رشته‌های نخ افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تاروپود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشه آن، قدمت قالی، بافنده قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تاروپود قالی است.



درس ۲

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

بر خلاف آنچه در «کار در کلاس های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است توان جواب های معادله درجه ۲ را حدس بزنیم.
در این درس با سه روش برای حل معادله درجه ۲ آشنا می شویم.

درس اول: تجزیه عبارت های جبری

در سال قبل و در فصل اول این کتاب با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنا شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارت های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادلات درجه دو به کار خواهیم برد. برای یادآوری این اتحادها را مرور می کنیم:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{اتحاد مربع مجموع دو جمله ای} \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله ای} \end{aligned}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{اتحاد جمله مشترک}$$

فعالیت



طرف دوم تساوی های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده کامل کنید:

الف) اتحاد مربع ۲ جمله ای: $(2x + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

ب) اتحاد مزدوج: $(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$

ت) اتحاد مربع ۲ جمله ای: $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

ب) اتحاد مربع ۲ جمله ای: $(2 + 3xy)^2 = 4 + 12xy + 9x^2y^2$

ت) اتحاد جمله مشترک: $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

جمله مشترک x جمع غیر مشترک در ۲: $(-4-2) \times x = -6x$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

یادآوری:

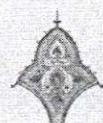
شکل کلی معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$

فعالیت



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ یا $x = -6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل یابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$ ریشه مضاعف
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$	روش ۱: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0$ $\Rightarrow x = +4$ یا $x = -4$ روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = -3$ یا $x = -2$
اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$ $(x-5)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 5$ ریشه مضاعف



در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف دارد.

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟ **فاکتورگیری**

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟ **هرگاه بیان سمت چپ تساوی را به شکل $a^2 + 2ab + b^2$ بنویسید**

پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟ **$b = 0$**

آیا علامت‌های a و c مهم است؟ **بله - باید مختلف‌العلامت باشند.**

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟ **اتحاد مربع دو جمله‌ای**

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$x^2 + 9 = 0$ و $-x^2 - 5 = 0$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $(x)^2 \quad 2(x)(\sqrt{2}) \quad (\sqrt{2})^2$

① جواب: $(الف) 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2$
 (روش دوم: فاکتورگیری)

(ب) $(x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$
 روش دوم: $x^2 - x - 6 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$

(پ) $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{x}$

$x^2 - x + \frac{1}{x} = 0$ اتحاد مربع مجهول

$(x - \frac{1}{x})^2 = 0$

$(x - \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = 0$

$x = \frac{1}{x} \text{ یا } x = \frac{1}{x}$

ریشه مضاعف

(روش دوم: ضرب طرفین در x و بعد استقاره از اتحاد مشترک)

(ث) $2x^2 - 8x = 0$

$2x(x-4) = 0$

$x = 0 \text{ یا } x = 4$

(ج) $x^2 - 5x + 4 = 0$

اتحاد مربع مشترک

$(x-3)(x-2) = 0$

$x = 3 \text{ یا } x = 2$

(ح) $\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$

$x = 0 \text{ یا } x = 3$

(ع) $x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5$

$x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

(خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

اتحاد مربع مجهول

$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+2) = 0$

$x = -2 \text{ یا } x = -2$

ریشه مضاعف

(ز) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

$(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$

اتحاد مربع مشترک

$(3x+2)(3x-1) = 0$

$x = -\frac{2}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$

(ذ) $(x-3)^2 = 4$

$x-3 = 2 \text{ یا } x-3 = -2$
 $x = 5 \text{ یا } x = 1$

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:

1) $x^2 + 3x - 4 = 0$
 $\begin{matrix} -4 \otimes +1 = -3 \\ -4 \oplus +1 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} +4 \otimes -1 = -4 \\ +4 \oplus -1 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} +2 \otimes -2 = -4 \\ +2 \oplus -2 = 0 \end{matrix}$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$\Rightarrow (x-1)(x+4) = 0$

$\Rightarrow (x-1) = 0 \text{ یا } (x+4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -4$

2) $4x^2 - (2-x)^2 = 0$

(2x)

با استفاده از اتحاد مربع جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم:

$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow (3x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ یا } x = -2$

$\begin{matrix} 3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{matrix}$

تمرین



1. معادلات زیر را حل کنید.

(ب) $x^2 - 2x^2 = 0$

(ب) $(x+2)(x-3) = x-3$

(الف) $2x^2 - 8 = 0$

(ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(ث) $2x^2 - 8x = 0$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{x}$

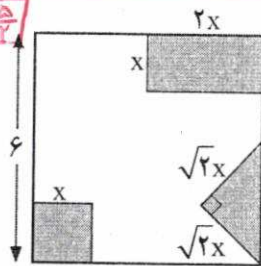
(خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

(ح) $x^2 = 5 - x^2$

(ج) $\frac{x^2}{3} = x$

(ذ) $(x-3)^2 = 4$

(د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$



2. از مربعی به ضلع 6cm سه شکل روبه رو بریده شده است. مساحت باقی مانده 24 cm^2 است.

است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

$x^2 + 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 36 - 24 = 12$
 $\frac{5}{2}x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = \frac{24}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{24}{5}}$

$36 = 6^2 = 36$

$x^2 = x^2$

$x \times x = x^2$

$\frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2}x^2 \times 2 = x^2$

$\frac{1}{2}x^2 \times 2 = x^2$

3. معادله درجه دومی بنویسید که $x=2$ و $x=-3$ جواب های آن باشند. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$x=2 \text{ یا } x=-3$

$x-2=0 \text{ یا } x+3=0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x^2 + (-2+3)x + (-2)(3) = 0 \Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$

$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$

جواب ۴) $x=1$ یا $x=1$
 $x-1=0$ یا $x-1=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)=0$
 $x^2-2x+1=0$

جواب ۵) سمت الف) $k=2 \Rightarrow (x-1)^2=2$
 $x-1=+\sqrt{2}$ یا $x-1=-\sqrt{2}$
 $x=1+\sqrt{2}$ یا $x=1-\sqrt{2}$

۴) معادله درجه دومی بنویسید که $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟
 ۵) در معادله $(x-1)^2=K$:

جواب ۵) $k=4 \Rightarrow (x-1)^2=4$
 $x-1=+2$ یا $x-1=-2$
 $x=3$ یا $x=-1$

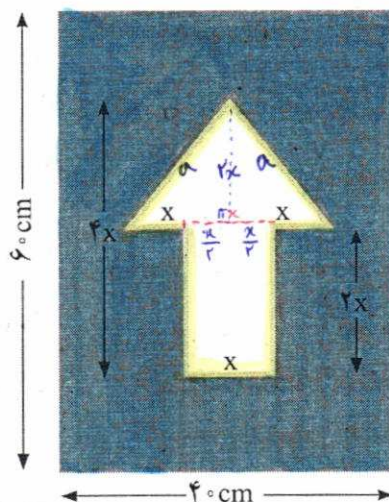
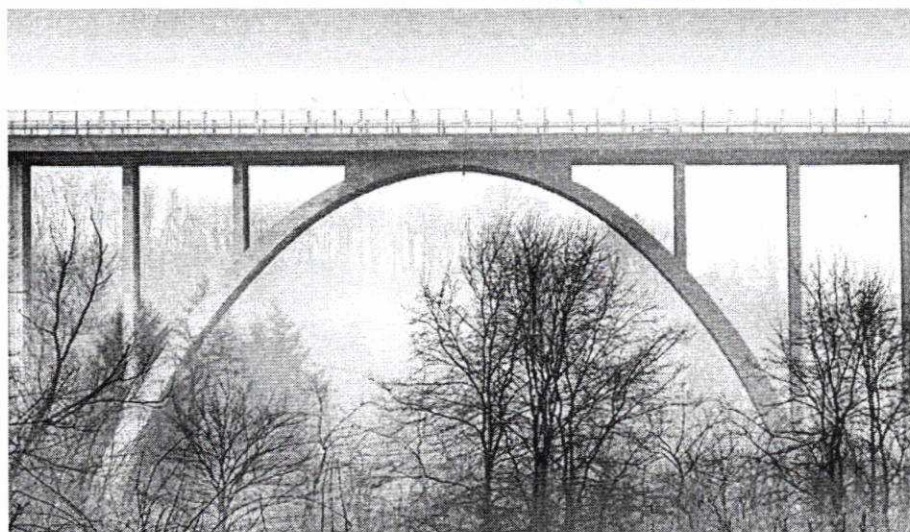
الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K=2, K=4, K=0$ و $K=-9$ به دست آورید.

جواب ۵) $k=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$
 $(x-1)(x-1)=0$
 $x=1$ یا $x=1$
 ریشه مضاعف

ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟ $k=0$
 پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟ $k > 0$ (مقادیر مثبت k)
 ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟ $k < 0$ (مقادیر منفی k)

۶) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برجسب های آبی و سفید استفاده می شود. هزینه 1 cm^2 برجسب سفید 3° تومان و هزینه 1 cm^2 برجسب آبی 1° تومان است. مجموع هزینه برجسب های سفید و آبی $27,000$ تومان شده است.

جواب ۶) $k=-9 \Rightarrow (x-1)^2=-9$
 سمت چپ همواره منفی و سمت راست همواره منفی است و تساوی غیر ممکن است یا اینکه اعداد منفی ریشه دوم ندارند پس معادله جواب ندارد.



الف) اندازه x چقدر است؟

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه رو از خطوط برجسب شیرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm آن 100 تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو $34,800$ تومان می شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟

مساحت مثلث سفید + مساحت مثلث سفید = مساحت مثلث کل

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2x + x \times 2x = 4x + 2x^2 = 150x^2$$

$$= 150x^2 + 24000 - 40x^2 = 110x^2 + 24000$$

$$110x^2 + 24000 = 27000 \Rightarrow 110x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = \frac{3000}{110} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3000}{110}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{300}{11}}$$

$$(24000 - 40x^2) \times 100 = 240000 - 4000x^2 = 348000$$

$$100x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm \sqrt{30} \Rightarrow x = \pm \sqrt{30}$$

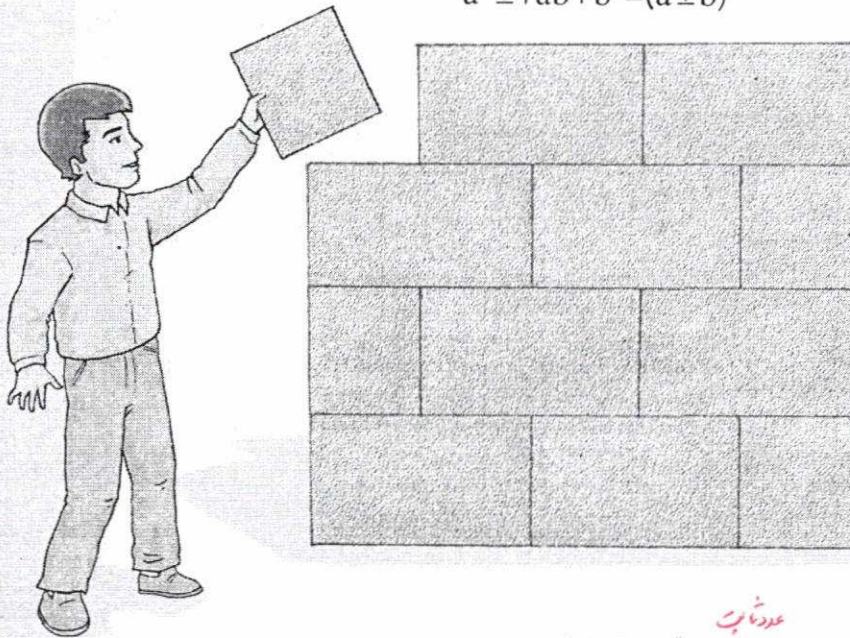
ب) $100x^2 + 12000x - 108000 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x+18)(x-9) = 0$
 $x = -18$ یا $x = 9$

$$a^2 = (x + \frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2$$

 $a^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 + 2 \times \frac{b}{a} x + \frac{c^2}{a^2}$
 $a^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 + 2 \times \frac{b}{a} x + \frac{c^2}{a^2}$
 $a = \frac{b}{a} x$

روز دوم: مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



مثال: معادله درجه دوم $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را حل کنید.

عبارت جلات مثل x در دو طرف مساوی باشند.

۱- ابتدا قرینه عدد ثابت معادله؛ یعنی $..... + 5$ را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$2x^2 + 3x = -5 \quad (1) \quad \leftarrow 2x^2 + 3x - 5 + 5 = 0 + 5$$

۲- اگر ضریب x^2 مخالف ۱ باشد، دو طرف معادله را به ضریب x^2 تقسیم می کنیم. بنابراین، در معادله

بالا دو طرف تساوی را بر عدد 2 تقسیم می کنیم:

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{-5}{2}$$

(۲)

۳- در عبارت $\frac{3}{2}x$ با در نظر گرفتن اتحاد مربع دو جمله ای $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

برای ایجاد جمله $2ab$ ، $\frac{3}{2}x$ را در عدد 2 ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\frac{3}{2}x = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \right) = 2 \times \frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد $\frac{3}{4}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{-5}{2} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \quad (3)$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 a^2 $b \times a$ b^2 $(a+b)^2$

بنابراین:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$

با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار x به دست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

پس جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

هستند. $x = -\frac{5}{2}$ و $x = 1$

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی

زیر نیز می‌توان بیان کرد:

- اگر x^2 را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{4}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{4}$ و عرض x در نظر بگیریم:

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{5}{2}$$

- با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{4}$ در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول $\frac{3}{8}$ در تساوی (۲):

$$x^2 + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right)x = x^2 + \frac{3}{4}x$$

خواندنی

و قرار دادن ۲ مستطیل فوق در کنار مربع x^2 ، تساوی بالا به صورت زیر در می آید:

$$x^2 + x \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{3}{4} = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع $\frac{3}{4}$ دارد.

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

به اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

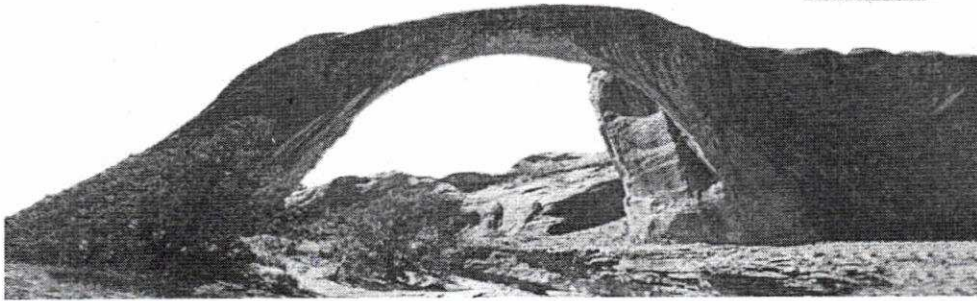
$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

جزء طرفین

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب $x = 1$ و $x = -\frac{5}{4}$ است. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x = -\frac{5}{4}$ معنی پیدا نمی کند.

شیوه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضیدان، منجم، مورخ و جغرافیدان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^2 + px = q$ و با فرض $p, q > 0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هرچند همه معادلات درجه دوم را نمی توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادلات است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه ها را می توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

$$1) 2x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2}{2} - \frac{6x}{2} = \frac{1}{2} \\ & x^2 - 3x = \frac{1}{2} \\ & x^2 - 2 \times \frac{3}{2} x = \frac{1}{2} \\ & \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ & x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \\ & \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4} \\ & x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \\ & \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

مسابقه

$$2) 3x^2 - 2 = 6x$$

$$\begin{aligned} & \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{3} = \frac{2}{3} \\ & x^2 - 2x = \frac{2}{3} \\ & x^2 - 2x + 1 = \frac{2}{3} + 1 \\ & \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right) \\ & \left(x - 1\right)^2 = \frac{5}{3} \\ & x - 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \\ & \begin{cases} x = 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & x - 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \\ & \begin{cases} x = 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1 \times 3}{1 \times 3}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 - 4 = 0 - 4 \rightarrow x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 2\left(\frac{5}{2}x\right) = -4 \rightarrow x^2 - 2\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4} = \frac{-16 + 25}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4 \\ x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 2 + 2 = 0 + 2 \rightarrow x^2 + 2x = 2$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = 2 \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{8 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4} \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 4x + 9 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -9 \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{4}{2}x\right) = -9$$

$$x^2 + 2\left(\frac{4}{2}x\right) + 4 = -9 + 4 \rightarrow (x+2)^2 = -5$$

$$(x+2)^2 = 0 \rightarrow (x+2) = 0 \rightarrow x = -2$$

$$(x+3)(x+3) = 0 \rightarrow x = -3$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x$$

روش سوم: روش کلی حل معادله درجه دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می آید. با مرور پله های گفته شده در بخش قبل:

۱- قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$ax^2 + bx = -c \quad (1)$$

$$\frac{ax^2 + bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

ضرب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم و مربع عدد به دست آمده؛ یعنی $\frac{b^2}{4a^2}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (3)$$

عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می کنیم:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

دلتا

عبارت $b^2 - 4ac$ را مبین معادله درجه دوم می نامند و آن را با Δ نشان می دهند.

بر اساس علامت Δ می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟) چون اعداد حقیقی، ریشه دوم ندارند.

فعالیت



۱. جواب های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.

بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

۲. جواب های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن $a = 4$ ، $b = 7$ ، $c = -2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad x = \frac{-16}{8} = -2$$

۱. Δ چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت Δ و دلتای کوچک را با علامت δ نشان می دهند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

بصراحت مثال نمی آید از معادلاتی که استاندارد شده نیستند و یا Δ آنها جذرها را می نژارد، حل شود.
معین مثال برای $\Delta = 0$ و داشتن ریشه مضاعف می شود.

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

معادله ۲ ریشه دارد.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 + x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-5+1}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(4)(-7) = 121 > 0$

معادله ۲ جواب دارد.

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2(4)}$

$x_1 = -\frac{7}{4} \quad x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = -\frac{7}{4} + 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

۳) جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن $a=3 \quad b=1 \quad c=7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

کار در کلاس



معادلات زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a, b, c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

طرح ر حل چند مسئله کاربردی از معادله درجه دو

مسئله اول:

مقدمه: در هر مسئله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

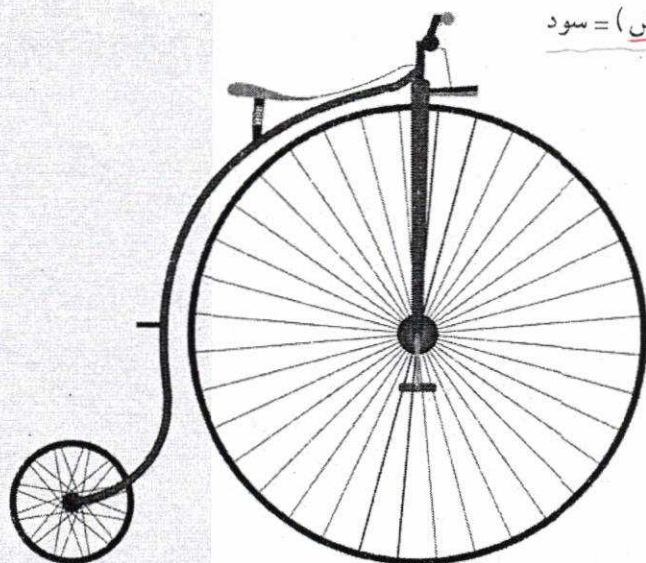
تابع هزینه (cost) یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود (profit) یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{هزینه} - \text{درآمد (فروش)} = \text{سود}$



فرض کنید، شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید آن را به صورت انبوه تولید کنید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش‌اند:

۱. هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

هزینه اولیه برای دست : ۷۰۰۰۰

هزینه تولید هر دوچرخه : ۱۱۰ هزار تومان

اشغال بایستی ۷۰۰۰۰

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $۷۰۰۰۰ - ۲۰۰۰۷$ به دست آید :

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می شود؟

■ حل :

$$R(x) = \text{درآمد} = (\text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه}) = (۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰۰۷) \times ۷ = ۷۰,۰۰۰ \times ۷ - ۲۰۰۰۷ \times ۷$$

$$C(x) = \text{هزینه} = \text{هزینه اولیه} + \text{هزینه تولید} = ۷۰,۰۰۰ + ۱۱۰(۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰۰۷) = ۱۴,۷۰۰,۰۰۰ - ۲۲,۰۰۰۷$$

$$P(x) = \dots\dots$$

مسئله دوم :

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه $p(x) = -۰/۰۰۴۰۵x^2 + ۸/۱۵x - ۱۰۰$ چتر از رابطه

به دست می آید.

$$x=0 \Rightarrow P(0) = -۰/۰۰۴۰۵x^2 + ۸/۱۵x - ۱۰۰$$

$$P(0) = -۱۰۰$$

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد،

چقدر از دست می دهد؟ ۱۰۰ واحد

ب) نقطه سر به سر (break-even)

میزانی از تولید یک بنگاه

اقتصادی را نشان می دهد که در

آن میزان هزینه ها با میزان درآمدها

برابر می شود و بنگاه در این سطح

از تولید نه سود می کند و نه ضرر.

اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر

باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر

کمتر باشد، زیان خواهد دید.



هزینه درگاه
(سود نه ضرر)

۲۰۰۰ چتر

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟ چندمین تولید چتر

برای کارگاه سودآور است؟ کی بشیر، یعنی ۲۰۰۱ آیین چتر

$$P(x) = 0 \text{ در نقطه سر به سر}$$

$$-۰/۰۰۴۰۵x^2 + ۸/۱۵x - ۱۰۰ = 0$$

$$\Delta = (۸/۱۵)^2 - ۴(-۰/۰۰۴۰۵)(-۱۰۰) = ۴۴,۸۰۲۵$$

معادله
دارد

$$x = \frac{-۸/۱۵ \pm \sqrt{۴۴,۸۰۲۵}}{2(-۰/۰۰۴۰۵)}$$

$$x = ۲۰۰۰$$

حل ۱) $x^2 - x + 5 = 0$
 $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$ معادله ریشه ندارد.

(۳) $x^2 - 4x + 1 = 0$
 $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد.
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

(۵) $3x^2 - x + 4 = 0$
 $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4) = -47 < 0$ معادله ریشه ندارد.

(۲) $2x^2 + x - 1 = 0$
 $\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0$ معادله ۲ ریشه دارد.
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}} \text{ و } \boxed{x = -1}$

(۴) $x^2 + 17x - 18 = 0$
 $\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 349 > 0$ معادله ۲ ریشه دارد.
 $x = \frac{-17 \pm \sqrt{349}}{2 \times 1} \Rightarrow \boxed{x = 1} \text{ و } \boxed{x = -18}$

تمرین



۱. معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

$2x^2 + x - 1 = 0$ (۲) $x^2 - x + 5 = 0$ (۱)
 $x^2 + 17x - 18 = 0$ (۴) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ (۳)
 $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$ (۶) $3x^2 - x + 4 = 0$ (۵)

۲. معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.
 $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 > 0$
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{5}{2}} \text{ و } \boxed{x_2 = -1}$
 $x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2}$

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر ۴ باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟
 $x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \Rightarrow 32 + 4a + 28 = 0 \Rightarrow 4a = -60 \Rightarrow a = -15$

۴. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 2x \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

۵. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟
 الف) $x^2 + ax - 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(-1) = a^2 + 4 > 0$
 ب) $x^2 - x + a = 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a$
 ج) $x^2 + ax + 1 = 0$ $\Delta = a^2 - 4(1)(1) = a^2 - 4$
 د) $x^2 + ax + a = 0$ $\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 \leq 0$

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $-\frac{c}{a}$ است.
 $x_1 \times x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$)، یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a-c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow \boxed{x = 1} \text{ و } \boxed{x = \frac{c}{a}}$

※ حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

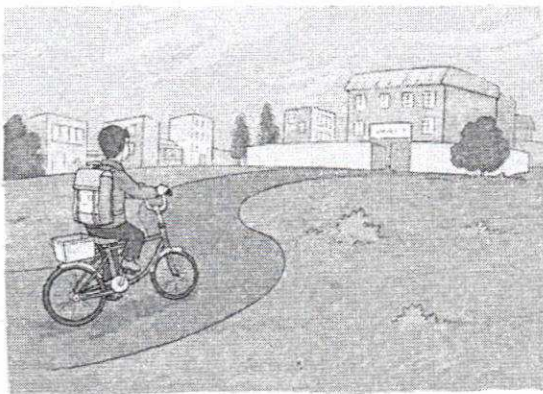
توجه: در حل تمرین ۳، می‌توان عبارت یافتن مقدار مجموع a ، از مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها، برای یافتن ریشه‌ی دوم استفاده کرد.

جواب ۵) $\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$
 $\Delta = (a-c)^2 \geq 0$ معادله ۲ ریشه دارد.
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = -\frac{c}{a} \\ x = \frac{-a-c+a+c}{2a} = \frac{0}{2a} = 0 \end{cases}$

درس ۳

معادلات شامل عبارت‌های گویا

فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

۲/۵
۱۰۰۰ ÷ ۲۵۰۰
موتور

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

$$15 = \frac{250}{t}$$

۲. برای $15 = \frac{250}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{250}{t}$ است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با 15 جمع کنید.

$$\frac{250}{t} - 15 = 15 - 15 \Rightarrow \frac{250}{t} - 15 = 0$$

۳. با مخارج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{250}{t} - 15 \times \frac{t}{t} = 0 \Rightarrow \frac{250 - 15t}{t} = 0$$

۴. کسری که مخارج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین

$$250 - 15t = 0$$

۵. از اینجا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$250 - 15t = 0 \Rightarrow 15t = 250 \Rightarrow t = \frac{250}{15} = 16\frac{2}{3} \text{ ساعت}$$

$$16\frac{2}{3} \times 60 = 1002 \text{ دقیقه}$$

دستور: $4 + 1002 = 1006$
زمان مربوط به علی مسیر از در منزل تا سر خیابان اصلی
از خیابان اصلی تا مدرسه

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. با شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟) **چون تقسیم عدد بر صفر تعریف نشده است.**

مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{(x-3)} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = 3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-8 + x^2-4x+5 - x^2+6x-5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-8}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow x^2+2x-8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -4, x = 2$$

مثال: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است. **عقوبتی (مخرج کسرها صفر نرند)**

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$\text{جواب (ب)}: \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\frac{x^2 + x - 4}{(x-4)(x+3)} - \frac{x^2 - 3x - 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 4 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{جواب (ب)}: \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$\frac{24(10-m)}{(10+m)(10-m)} + \frac{1(10-m)(10+m)}{(10-m)(10+m)} = \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)}$$

$$240 - 24m + 100 - m^2 - 240 - 24m = 0$$

$$-m^2 - 48m + 100 = 0$$

$$m^2 + 48m - 100 = 0$$

$$\Delta = (-48)^2 - 4(1)(-100) = 2304 + 400 = 2704$$

$$\Delta = 2704 > 0$$

$$m = \frac{-48 \pm \sqrt{2704}}{2} = \frac{-48 \pm 52}{2}$$

$$m = -50 \quad \text{یا} \quad m = 2$$

حل: $x=1$ را در معادله قرار می دهیم و سپس مقدار a را به دست می آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1) - 2}{(a+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \text{یا} \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخرج کسره های معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی کنند، پس هردو قابل قبول اند.

کار در کلاس



معادله های زیر را حل کنید.

الف) $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x}$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

ت) $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

چند مسئله کاربردی از معادلاتی عبارت های گویا دارند



۱. گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

حل: $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با x

در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان

قبل از ذوب شدن برابر با $9x$ است.

اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $9x+100$ است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\text{جواب (ت)}: \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$\frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y-1)(3-y)}{(3-y)(y+3)} - 1$$

$$\frac{y^2 - y - 6 - y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{3 - y - 3 + y}{(y-3)(y+3)}$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{0}{(y-3)(y+3)}$$

$$-y-6 = 0$$

$$y = -6$$

$$\frac{y^2 - y - 6 - y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{3 - y - 3 + y}{(y-3)(y+3)}$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{0}{(y-3)(y+3)}$$

$$-y-6 = 0$$

$$y = -6$$

$$\frac{-y^2 - 3y + 6}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$-y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$y^2 + 3y - 6 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-6) = 9 + 24 = 33$$

$$\Delta = 33 > 0$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$y = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$-y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$y^2 + 3y - 6 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-6) = 9 + 24 = 33$$

$$\Delta = 33 > 0$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$y = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-6) = 9 + 24 = 33$$

$$\Delta = 33 > 0$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$y = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\Delta = 33 > 0$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$y = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$y = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$y = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{جواب (ث)}: x=2 \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} - \frac{a}{2} = 0$$

$$\frac{2}{a-2} - \frac{1 \times (a-2)}{1 \times (a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{4-a}{(a-2)} = 0$$

$$4-a = 0$$

$$a = 4$$

$$\frac{2}{a-2} - \frac{1 \times (a-2)}{1 \times (a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{4-a}{(a-2)} = 0$$

$$4-a = 0$$

$$a = 4$$

از آنجا که $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم:

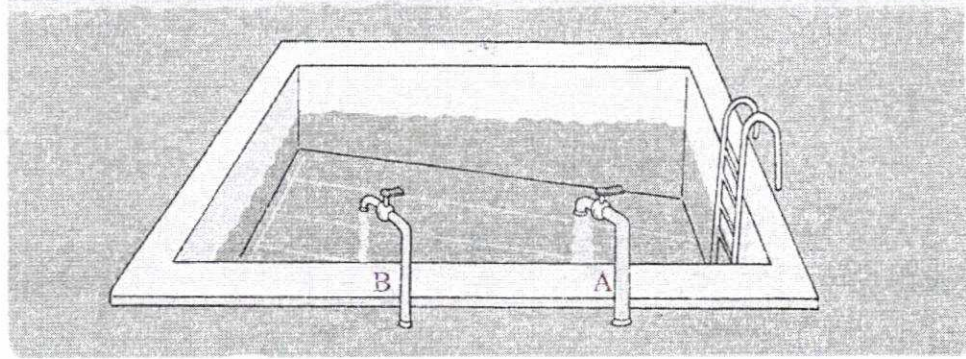
$$\frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8x}{9x+100} - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8x \times 5}{(9x+100) \times 5} - \frac{4(9x+100)}{5(9x+100)} = 0 \Rightarrow \frac{40x - 36x - 400}{5(9x+100)} = 0 \quad (9x+100 \neq 0 \text{ با شرط})$$

$$4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100$$

از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن $9x$ است، در نتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با 900 گرم است.

۲) دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پُر می کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پُر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می شود.



■ حل: فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پُر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پُر می شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ استخر پُر می شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0$$

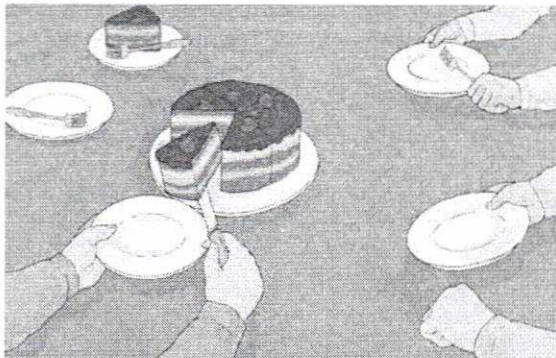
$$\Rightarrow \frac{1 \times 12(x-10) + 1 \times 12x}{x \times 12(x-10)} - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 34x - 120}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 34x - 120 = 0$$

$$\frac{12x - 120 + 12x - x^2 + 10x}{12x(x-10)} = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 34x + 120 &= 0 \\ (x-20)(x-6) &= 0 \\ x &= 20 \quad \text{یا} \quad x = 6 \end{aligned}$$

با توجه به شرایط مسئله، $x=6$ رد می شود.
 $\Delta = 34^2 - 4(-1)(-120) = 476$
 $\Delta = 476 > 0$ معادله ۲ ریشه دارد.
 $x = \frac{-34 \pm \sqrt{476}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 6 \end{cases}$

(یعنی شیر B استخر را در ۶ ساعت، شیر A در ۲۰ - ۱۰ = ۱۰ ساعت و دو شیر با هم در ۱۲ ساعت پُر می کنند)



۳: یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

حل: فرض کنید در ابتدا n نفر بوده اند؛ بنابراین به هر یک $\frac{1}{n}$ کیک رسید، در مرحله بعد به هر یک $\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هر یک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1 \times (n+1) - 1 \times n}{n \times (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله $n=2$ به دست می آید.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6 = n(n+1) \Rightarrow 6 = n^2 + n \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(6) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

$$n = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = -3$$

تصویر: تعداد افراد در ابتدا ۲ نفر است.

۱) $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

۲) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

۳) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

۴) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

۵) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$

۶) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

۷) مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۸) هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. اگر چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

۹) به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-64}$ دارای جواب $t=-3$ است.

این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به جای (کیک)، کلمه درهم آمده است.

جواب ۸

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1 \times (x+3) + 1 \times x}{x \times (x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{4}$$

$$4(2x+3) = x(x+3) \Rightarrow 8x+12 = x^2+3x \Rightarrow x^2-5x-12=0$$

$$\Delta = 25 + 48 = 73 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$$

۹) $t=-3 \Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-64}$

$\frac{7}{8} = \frac{27+k}{16-64} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{-48} \Rightarrow 7(-48) = 8(27+k) \Rightarrow -336 = 216 + 8k \Rightarrow -552 = 8k \Rightarrow k = -69$

جواب ۷: $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{1 \times (k+2) + 1 \times k}{k \times (k+2)} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{k+2+k}{k(k+2)} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{2k+2}{k(k+2)} = \frac{3}{12}$

$12(2k+2) = 3k(k+2) \Rightarrow 24k+24 = 3k^2+6k \Rightarrow 3k^2-18k-24=0 \Rightarrow k^2-6k-8=0$

$\Delta = 36 + 32 = 68 \Rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{68}}{2} = 3 \pm \sqrt{17}$

$$\textcircled{1} \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$\frac{(3x-5) \times (x+3)}{(x+3) \times (x+3)} - \frac{1 \times (x+3)}{1 \times (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x+5-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{2x+2}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$\textcircled{2} \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$\frac{(3x-2) \times (x+3)}{x \times (x+3)} + \frac{(2x+5) \times x}{(x+3) \times x} - \frac{5 \times x \times (x+3)}{1 \times x \times (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+9x-2x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0$$

$$\frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$$

$$\textcircled{3} \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

$$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow \frac{(x+2) \times 1}{(x+2) \times 1} - \frac{(x+3) \times (x+2)}{1 \times (x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x+2-x^2-5x-6}{(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{(x+2)} = 0$$

$$-x^2-4x-4=0 \quad \text{یا} \quad x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \xrightarrow{\text{جذر}} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{غرض} \rightarrow \text{دو معادله جواب ندارد چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \rightarrow x=-2 \quad \text{غرض} \rightarrow \text{دو معادله جواب ندارد چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

تهیه کننده :

$$\textcircled{4} \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{(x^2-2x+2) \times 1}{x(x-2) \times 1} - \frac{(1+x) \times (x-2)}{x \times (x-2)} - \frac{(x-1) \times x}{(x-2) \times x} = 0$$

$$\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-2-x+2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x+4}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x+4=0 \Rightarrow x=4 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm 2$$

$$\boxed{x=-2} \quad \text{یا} \quad x=+2 \quad \text{غرض} \rightarrow \text{چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\textcircled{5} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$\frac{3 \times (x+3)(x-2)}{(x-1) \times (x+3) \times (x-2)} - \frac{2 \times (x-1)(x-2)}{(x+3) \times (x-1) \times (x-2)} - \frac{4 \times (x-1)(x+3)}{(x-2) \times (x-1) \times (x+3)} = 0$$

$$\frac{3x^2-3x-18-2x^2+4x-4-4x^2-12x+12}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2-5x-10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0$$

$$-3x^2-5x-10=0 \quad \text{یا} \quad 3x^2+5x+10=0 \quad \Delta = 5^2 - 4(3)(10) = 25 - 120 = -95$$

$$\Delta = -95 < 0$$

معادله ریشه ندارد

$$\textcircled{4} \quad \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{\cancel{1-x} \cdot (x-2)} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$-3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \quad ; \quad \text{این معادله جواب ندارد.}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

سؤالات تکمیلی ریاضی و آمار دهم انسانی
(فصل دوم : معادله ی درجه ی دوم)

۱- معادله های درجه ی دوم زیر را به روش خواسته شده حل کنید :

الف) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(روش تجزیه)

ب) $x^2 + 10x - 11 = 0$

(روش مربع کامل)

ج) $5x^2 - 3x + 7 = 0$

(روش کلی)

۲- اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله ی درجه ی دوم در ستون بعدی است ، با یک خط به یکدیگر وصل کنید . سپس معادله ها را در ستون آخر حل کنید .

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
عامل یابی (فاکتورگیری)	$9x^2 - 25 = 0$	
اتحاد مربع دو جمله ای	$3x^2 + 9x = 0$	
اتحاد مزدوج (روش ریشه گیری)	$x^2 - 10x + 16 = 0$	
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 8x + 16 = 0$	

۳- معادله ی $(x+4)^2 = a$ ، به ازاء چه مقادیری از a :

ج) ریشه ی حقیقی ندارد

ب) دو ریشه ی حقیقی دارد

الف) ریشه ی مضاعف دارد

۴- معادله ی درجه دومی بنویسید که $x = -3$ ریشه ی مضاعف آن باشد .

۵- اگر x_1, x_2 ریشه های معادله ی $5x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند ، بدون حل معادله ، مجموع و حاصلضرب ریشه ها را به کمک فرمول به دست آورید .

۶- معادله ی درجه ی دومی بنویسید که :

الف) ریشه ی مضاعف دارد ب) دو ریشه ی حقیقی دارد ج) ریشه ی حقیقی ندارد

۷- به کمک اتحادها ، جاهای خالی را با جمله ی مناسب کامل کنید :

الف) $(2x + \dots)^2 = 25y^2 + 4x^2 + 20xy$

ب) $(xy - 3)(xy + 8) = x^2y^2 + \dots - 24$

ج) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)^2 = \dots + \dots + \frac{1}{16}$

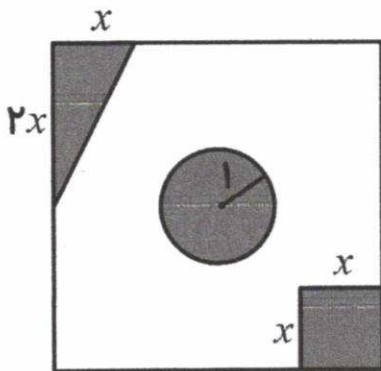
د) $(2x + y)(\dots - \dots) = 4x^2 - \dots$

هـ) $(3 - \dots)^2 = \dots - 12xy + \dots$

و) $(x + 4)(x - \dots) = x^2 + \dots - 12$

ز) 96×104

۸- در زمینی مربعی شکل به ضلع $10m$ سه باغچه ی کوچک به شکل زیر ساخته شده است . مساحت زمین باقیمانده $85m^2$ است . طول x را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۹- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $4\sqrt{2}$ است .

۱۰- مجموع معکوس دو عدد فرد طبیعی متوالی $\frac{12}{35}$ است . آن دو عدد را پیدا کنید .

۱۱- معادله های کسری زیر را حل کنید .

الف) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1}$

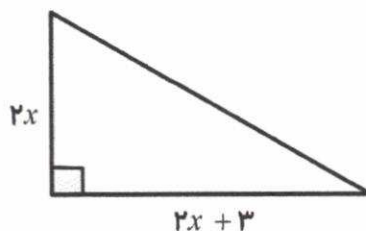
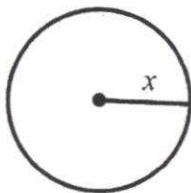
ب) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$

ج) $\frac{x^2+4}{x} = 5$

د) $2x-1 = \frac{3x}{1-x} + 2$

۱۲- به ازای چه مقدار m معادله ی $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{m} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است؟

۱۳- مساحت دایره و مثلث با هم برابر است . قاعده و ارتفاع مثلث و شعاع دایره را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۱۴- تعداد جواب های معادله های زیر را فقط تعیین کنید .

الف) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

ب) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

ج) $x^2 + 1 = 0$

د) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

۱۵- نام اتحادهای زیر را نوشته و سمت راست آن ها را بنویسید .

الف) $(x-5)(x+5) = \dots\dots\dots$

ب) $(2x+x^2)^2 = \dots\dots\dots$

ج) $(3x-2)(3x+7) = \dots\dots\dots$

د) $(a-7)^2 = \dots\dots\dots$

۱۶- سود حاصل از فروش x پیراهن در یک تولیدی ، از رابطه ی $P(x) = x^2 + x - 12$ به دست می آید .

الف) اگر این تولیدی ، هیچ پیراهنی نفروشد ، چقدر از دست می دهد ؟

ب) به ازاء چه تعداد فروش پیراهن ، تولیدی به نقطه ی سر به سر خود می رسد ؟

ج) چندمین تولید پیراهن ، برای این تولیدی سودآور است ؟

۱۷- یک پیتزا را بین چند نفر تقسیم کرده ایم و به هر کدام مقداری مساوی رسید . سپس یک نفر به آنها اضافه شد و دوباره پیتزا را بین آنها تقسیم کردیم . در این مرحله به هر کدام $\frac{1}{6}$ کمتر رسد . مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند ؟

۱۸- تابع درآمد و تابع هزینه هفتگی یک کارخانه به صورت زیر است :

تابع هزینه $C(x) = 100 + x$ ، تابع درآمد $R(x) = 21x - x^2$ تابع درآمد

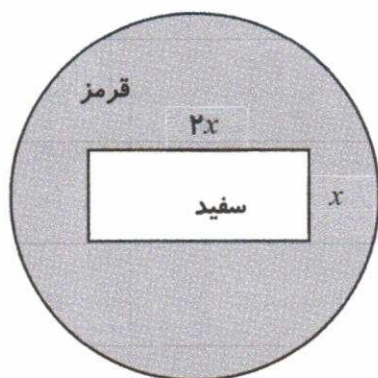
الف) معادله ی سود این کارخانه را بنویسید .

ب) سود کارخانه پس از تولید چند کالا حاصل می شود؟

۱۹- برای ساخت یک تابلو مانند شکل زیر، از برچسب های قرمز و سفید استفاده می شود .

هزینه ی 1 cm^2 برچسب سفید ۲۰ تومان و هزینه ی 1 cm^2 برچسب قرمز ۱۰ تومان است. (مساحت دایره ۲۴۰ سانتی متر مربع است) . مجموع هزینه های برچسب های سفید و قرمز ۳۴۴۰۰ تومان شده است .

اندازه ی x چقدر است؟



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان